ISRAEL JOURNAL OF MATHEMATICS, Vol. 37, Nos. 1-2, 1980

UN NOUVEAU $\mathscr{C}(K)$ QUI POSSEDE LA PROPRIETE DE GROTHENDIECK

PAR
MICHEL TALAGRAND

ABSTRACT

Using the continuum hypothesis, we construct a compact space K such that $\mathscr{C}(K)$ possesses the Grothendieck property, but such that the unit ball of $\mathscr{C}(K)'$ does not contain $\beta\mathbf{N}$, and hence, in particular, such that $l^\infty(\mathbf{N})$ is neither a subspace nor quotient of $\mathscr{C}(K)$. In particular, K does not contain a convergent sequence but does not contain $\beta\mathbf{N}$.

I. Introduction

On dit qu'un espace de Banach E possède la propriété de Grothendieck si toute suite (y_n) de E' qui tend vers zéro pour $\sigma(E', E)$ tend aussi vers zéro pour $\sigma(E', E'')$. Il est connu que si K est un espace compact σ-Stonien, c'est-à-dire où l'adhérence de tout ouvert F_σ est ouverte, $\mathscr{C}(K)$ possède la propriété de Grothendieck. Dans ce cas, $\mathscr{C}(K)$ possède de nombreux sous-espaces isomorphes à $l^\infty = l^\infty(\mathbf{N})$, donc également, puisque l^∞ est injectif, des quotients isomorphes à l^∞. C'est donc une question naturelle de savoir si tout $\mathscr{C}(K)$ qui possède la propriété de Grothendieck admet l^∞ comme quotient. Nous allons ici montrer qu'avec l'hypothèse du continu, on peut construire un compact K tel que $\mathscr{C}(K)$ possède la propriété de Grothendieck, sans que la boule unité $M_1(K)$ du dual $M(K) = \mathscr{C}(K)'$ ne contienne de compact homéomorphe à la compactification de Stone–Cech $\beta\mathbf{N}$ des entiers.

On muni bien sûr $M_1(K)$ de la topologie vague $\sigma(M(K), \mathscr{C}(K))$. Pour situer le problème précisons que K ne peut en particulier contenir aucune suite convergente, et qu'il ne doit bien sûr pas contenir $\beta\mathbf{N}$. Un bel exemple d'espace $\mathscr{C}(K)$ qui possède la propriété de Grothendieck sans contenir l^∞ a été construit par R. Haydon [2]. Cet exemple n'utilise pas l'hypothèse du continu mais il admet l^∞ comme quotient.

Received November 23, 1979 and in revised form March 26, 1980

L'auteur exprime sa gratitude envers D. H. Fremlin, qui a eu le courage de lire la rédaction originelle de ce travail. La rédaction actuelle s'inspire directement de ses commentaires et remarques simplificatrices.

II. Preliminaires

Cette section contient quelques outils destinés à clarifier la situation. Pour un espace compact K, on notera $M_1(K)$ l'ensemble des mesures de masse $\leqq 1$ sur K, $M_1^+(K)$ l'ensemble des probabilités sur K, et l'on munira ces ensembles de la topologie vague $\sigma(\mathscr{C}(K)', \mathscr{C}(K))$. On dira qu'une mesure sur K est portée par un borelien A si $\mu(K \setminus A) = 0$.

Le lemme suivant est essentiellement connu ([4], lemma 1).

LEMME 1. *Soit K un espace compact, et (h_n) une suite de probabilités sur K qui sont portées par des boréliens disjoints. Soit $\varepsilon > 0$. Alors il existe une sous-suite (h'_n) et des ouverts disjoints (U_n) tels que $h'_n(U_n) \geqq 1 - \varepsilon$.*

Le résultat suivant est un outil puissant. Sa preuve est contenue dans la preuve du théorème 6 de [3].

LEMME 2. *Soit (X, Σ, μ) un espace probabilisé. Soit (v_n) une suite uniformément bornée de $L^1(\mu)$. Il existe alors $\eta \geqq 0$ et une sous-suite (v'_n) qui se décompose sous la forme $v'_n = g_n + h_n$, où la suite (g_n) est faiblement convergente, où les fonctions h_n sont portées par des ensembles mesurables disjoints, et où $\|h_n\| = \eta$.*

PROPOSITION 3. *Soit K un espace compact. Alors si $M_1(K)$ contient un fermé homéomorphe à $\beta\mathbf{N}$, il existe une suite (h_n) de $M_1(K)$, portée par des ensembles boréliens disjoints, avec $\|h_n\| = 1$, et un réel $\tau > 0$, de sorte que la propriété suivante soit vérifiée:*

(1) *Pour toute partie I de $\mathbf{N}$, il existe une famille finie F de la boule unité de $\mathscr{C}(K)$, et un entier N tel que*

$$\forall n \in I, \quad \forall m \in \mathbf{N} \setminus I, \quad n, m \geqq N \Rightarrow \exists f \in F; \qquad |h_n(f) - h_m(f)| \geqq \tau.$$

DÉMONSTRATION. Puisque $M_1(K)$ contient un fermé homéomorphe à $\beta\mathbf{N}$, il existe une suite (u_n) de $M_1(K)$ telle que l'application φ, prolongement à $\beta\mathbf{N}$ de l'application $n \to u_n$, soit un homéomorphisme.

Soit S un ensemble ayant la puissance du continu. On sait que $\{-1, 1\}^S$ est séparable, donc image continue de $\beta\mathbf{N}$. Il existe donc une famille $(A_s)_{s \in S}$ d'ensembles ouverts-fermés de $\beta\mathbf{N}$, telle que si pour $\varepsilon = 1$ on pose $\varepsilon A_s = A_s$, et pour $\varepsilon = -1$, on pose $\varepsilon A_s = \beta\mathbf{N}\setminus A_s$, pour toute famille $(\varepsilon_s)\in\{-1,1\}^S$, on ait $\bigcap_{s\in S}\varepsilon_s A_s \neq \emptyset$.

Pour tout $s\in S$, posons $C_s = \varphi(A_s)$ et $D_s = \varphi(\beta\mathbf{N}\setminus A_s)$. Puisque φ est un homéomorphisme, ce sont deux fermés disjoints de $M_1(K)$. La topologie vague étant la moins fine qui rende continues les applications $\mu \to \mu(f)$ pour $f\in\mathscr{C}(K)$, il existe une famille finie F_s de la boule unité de $\mathscr{C}(K)$, et un réel $\tau_s > 0$ tels que si $\mu\in C_s$, $\nu\in D_s$, il existe $f\in F_s$ avec $|\mu(f)-\nu(f)|\geqq\tau_s$.

Il existe alors une partie $S'\subset S$, ayant la puissance du continu, et un réel $\tau>0$ tels que pour $s\in S'$ on ait $\tau_s\geqq 2\tau$. Puisque S' a la puissance du continu, on peut supposer $S'=\{-1,1\}^{\mathbf{N}}$.

Pour $s\in S'=\{-1,1\}^{\mathbf{N}}$, soit $s(n)$ la coordonnée de rang n de s. Pour $n\in\mathbf{N}$, soit $v_n\in\varphi(\bigcap_{s\in S'}s(n)A_s)$. Pour toute partie $I\subset\mathbf{N}$, définissons $s_I\in S'$ par $s_I(n)=1$ si $n\in I$ et $s_I(n)=-1$ si $n\notin I$. Pour $n\in I$, on a donc $v_n\in\varphi(A_{s_I})=C_{s_I}$ et pour $n\in\mathbf{N}\setminus I$ on a $v_n\in\varphi(\beta\mathbf{N}\setminus A_{s_I})=D_{s_I}$. Il existe donc une famille finie $F=F_{s_I}$ de la boule unité de $\mathscr{C}(K)$ telle que:

$$(2)\qquad n\in I,\quad m\in\mathbf{N}\setminus I \Rightarrow \exists f\in F;\qquad |v_n(f)-v_m(f)|\geqq 2\tau.$$

Les v_n sont contenus dans un même $L^1(\mu)$. D'après le lemme 2, il existe $\eta\geqq 0$ et une sous-suite $v'_n = g_n + h'_n$, où les g_n sont faiblement convergentes dans $L^1(\mu)$, et où les h'_n sont portées par des boréliens disjoints et où $\|h'_n\| = \eta$. Mais puisque la suite (g_n) converge faiblement dans $L^1(\mu)$, elle converge faiblement dans $\mathscr{C}(K)'$, donc elle converge vaguement. On déduit donc de (2) que $\eta>0$. Puisque $\eta=\|h'_n\|$, on a $\eta<1$. Il est alors clair que le résultat découle de (2) si l'on pose $h_n=\eta^{-1}h'_n$.

III. Description de la construction

On désigne par Ω le premier ordinal non dénombrable. On va obtenir le compact cherché comme limite projective d'une suite $(K_\alpha)_{\alpha<\Omega}$ de compacts métrisables pour des applications continues $\varphi_{\beta,\alpha}: K_\beta \leftarrow K_\alpha$ (où $\beta<\alpha$). L'idée naturelle serait la suivante. Pour assurer que possède la propriété de Grothendieck, on va faire en sorte que si (λ_n) est une suite de $M_1(K)$ qui ne converge pas faiblement, il existe $\alpha>\beta$ tel que pour toute suite $\mu_n\in M_1(K_\alpha)$ avec $\varphi_{\beta,\alpha}(\mu_n)=\lambda_n$, la suite (μ_n) n'est pas vaguement convergente. Pour éviter d'introduire des copies de $\beta\mathbf{N}$ dans $M_1(K)$, on va faire en sorte qu'il existe un filtre $\mathscr{F}$, qui ne soit pas un ultrafiltre, et tel que si $\varphi_{\beta,\alpha}(\mu_n)=\lambda_n$, $\lim_{\mathscr{F}}\mu_n$ existe ($\mathscr{F}$ ne dépendant ni de α ni de (μ_n)). Ce programme se heurte malheureusement à des difficultés considérables. Les compacts K deviennent rapidement trop gros, et tout controle de la situation est perdu. On va donc remplacer la première condition par la suivante, plus subtile: pour toute (ou tout au moins pour assez) suite de mesures $\lambda_n \in M_1(K_\beta)$ portées par des ouverts disjoints, il existe $\alpha > \theta$, tel que pour toute suite $(\mu_n) \in M_1(K_\alpha)$, avec $\varphi_{\theta,\alpha}(\mu_n) = \nu_n$, la suite μ_n ne converge pas vaguement. Un bon moyen d'empêcher la croissance anarchique des K_α serait d'imposer que pour $\beta < \alpha$, l'application $\varphi_{\beta,\alpha}$ soit telle que pour tout ε, l'ensemble des $x \in K_\beta$ tels que diam $\varphi_{\beta,\alpha}^{-1}(x) > \varepsilon$ soit fini (où le diamètre est pris par rapport à une distance quelconque definissant la topologie de K_β). Cela n'est malheureusement pas possible; la condition technique (E) qui remplace cette condition en est une sorte de localisation. Maintenant, au travail!

Dans toute la suite, on assume l'hypothèse du continu, c'est-à-dire que Ω a la puissance du continu.

Désignons par $\eta : [\omega, \Omega[\to [\omega, \Omega[\times \Omega$ une bijection $\alpha \to (\eta_1(\alpha), \eta_2(\alpha))$ telle que $\eta_1(\alpha) \leqq \alpha \ \forall \alpha \in [\omega, \Omega[$.

Pour toute partie $P \subset \Omega$, on désignera par φ_P la projection naturelle de $\{0,1\}^\Omega$ dans $\{0,1\}^P$ ainsi que sa restriction aux sous-ensembles de $\{0,1\}^\Omega$. Ainsi pour $\alpha < \Omega$, φ_α désigne la projection de $\{0,1\}^\Omega$ dans $\{0,1\}^\alpha$. La coordonnée de rang α' de $t \in \{0,1\}^\alpha$ pour $\alpha > \alpha'$ est notée $t(\alpha')$.

On va construire des compacts $K_\alpha \subset \{0,1\}^\alpha$ pour $\omega \leqq \alpha \leqq \Omega$ de sorte que

$$K_{\alpha+1} = (Y_\alpha \times \{0\}) \cup (Z_\alpha \times \{1\}) \tag{3}$$

où Y_α et Z_α sont des fermés tels que $Y_\alpha \cup Z_\alpha = K_\alpha$, et où

$$K_\alpha = \{t;\, t \in \{0,1\}^\alpha,\ \varphi_{\alpha'}(t) \in K_{\alpha'},\ \forall \alpha' < \alpha\} \tag{4}$$

si α est un ordinal limite. On commence avec $K_\omega = \{0,1\}^\omega$.

Si K_β est construit, où $\omega \leqq \beta$, soit $(U_n(\beta,\gamma))_{n \in \mathbf{N}, \gamma < \Omega}$ une énumération de toutes les suites disjointes d'ouverts-fermés non vides de K_β.

Si K_α est construit, et si $\omega \leqq \theta \leqq \alpha$ et $\eta(\theta) = (\beta, \gamma)$, soit

$$V_n(\theta, \alpha) = \varphi_\beta^{-1}(U_n(\beta,\gamma)) \cap K_\alpha.$$

Si K_θ est construit, où $\omega \leqq \theta$, soit $(\nu_n(\theta,\delta))_{n \in \mathbf{N}, \delta < \Omega}$ une énumération de toutes les suites $(\nu_n)_{n \in \mathbf{N}}$ de $M(K_\theta)$ telles que

$$\|\nu_n\| = |\nu_n|(V_n(\theta,\theta)) = 1, \quad \|\nu_n^+\| \geqq \frac{1}{2} \quad \forall n \in \mathbf{N}.$$

Si K_α est construit, et si $\omega \leqq \theta \leqq \alpha$, soit

$$B_n(\theta, \delta, \alpha) = \{\lambda ; \lambda \in M(K_\alpha), \|\lambda\| = 1, \varphi_\theta(\lambda) = \nu_n(\theta, \delta)\}.$$

L'induction consiste à construire des ensembles $J(\theta, \delta, \alpha)$, $I(\theta, \alpha)$, $N_\varepsilon(\theta, \delta) \subseteq \mathbf{N}$ pour $\omega \leqq \theta < \alpha < \Omega$, $\delta < \alpha$, $\varepsilon \in \{0, 1\}$ de sorte que les conditions suivantes soient vérifiées:

(A) Pour $\theta < \alpha$, $\delta < \alpha$ on a $J(\theta, \delta, \alpha) \subseteq I(\theta, \alpha)$.

(B) Pour $\theta < \alpha$, $\delta < \alpha$ on a $N_0(\theta, \delta) \cap N_1(\theta, \delta) = \emptyset$.

(C) Pour $\theta < \alpha$, $\delta < \alpha$, $\varepsilon = 0, 1$, l'ensemble $J(\theta, \delta, \alpha) \cap N_\varepsilon(\theta, \delta)$ est infini.

(D) Pour $\alpha' \leqq \alpha$, $\delta < \alpha'$ les ensembles

$$J(\theta, \delta, \alpha) \setminus J(\theta, \delta, \alpha') \quad \text{et} \quad I(\theta, \alpha) \setminus I(\theta, \alpha')$$

sont finis.

(E) Pour $\omega \leqq \theta \leqq \alpha' < \alpha$, il existe $m \in \mathbf{N}$ tel que pour $n \in I(\theta, \alpha)$, $n \geqq m$ on ait

$$t, t' \in V_n(\theta, \alpha), \qquad \varphi_\theta(t) = \varphi_\theta(t') \Rightarrow t(\alpha') = t'(\alpha').$$

(F) Pour $\omega \leqq \theta < \alpha$, $\delta < \alpha$ et $\lambda_n \in B_n(\theta, \delta, \alpha)$ la limite $\lim_{n \to J(\theta, \delta, \alpha)} \lambda_n$ existe.

(G) Si α est de la forme $\alpha' + 1$, et $\eta(\alpha') = (\theta, \delta)$, pour toute suite $\lambda_n \in B_n(\theta, \delta, \alpha)$ les deux ensembles

$$\left\{n : \lambda_n(Z_{\alpha'} \times \{1\}) \geqq \frac{1}{6}\right\}; \qquad \{n : \lambda_n(Z_{\alpha'} \times \{1\}) = 0\}$$

sont infinis.

Pour $\alpha = \omega$, aucune construction n'est nécessaire.

Si α est un ordinal limite, la formule (4) donne K_α en fonction des $K_{\alpha'}$ pour $\alpha' < \alpha$. Choisissons $J(\theta, \delta, \alpha)$ et $I(\theta, \alpha)$ pour $\theta, \delta < \alpha$ de façon que les conditions (A) à (D) soient vérifiées.

Si $\omega \leqq \theta \leqq \alpha' < \alpha$, il existe $\alpha'' \in]\alpha', \alpha[$. Soit $m \in \mathbf{N}$ tel que

$$I(\theta, \alpha) \setminus I(\theta, \alpha'') \quad [0, m].$$

Il existe $m' \geqq m$ tel que

$$n \in I(\theta, \alpha''); \quad n \geqq m'; \quad t, t' \in V_n(\theta, \alpha''); \quad \varphi_\theta(t) = \varphi_\theta(t') \Rightarrow t(\alpha') = t'(\alpha').$$

D'où, puisque $t \in V_n(\theta, \alpha) \Rightarrow \varphi_{\alpha''}(t) \in V_n(\theta, \alpha'')$ et que $\varphi_{\alpha''}(t)\,(\alpha') = t(\alpha')$, on a

$$n \in I(\theta, \alpha''); \quad n \geqq m'; \quad t, t' \in V_n(\theta, \alpha); \quad \varphi_\theta(t) = \varphi_\theta(t') \Rightarrow t(\alpha') = t'(\alpha'),$$

ce qui montre que (E) est vérifiée.

Si $\lambda_n \in B_n(\theta, \delta, \alpha)$, alors $\varphi_{\alpha'}(\lambda_n) \in B_n(\theta, \delta, \alpha')$ si $\max(\delta, \theta) < \alpha' < \alpha$, donc

$\lim_{n\to J(\theta,\delta,\alpha')}\varphi_{\alpha'}(\lambda_n)$ existe alors ce qui montre que $\lim_{n\to J(\theta,\delta,\alpha)}\lambda_n$ existe d'après (D), donc (F) est vérifiée.

IV. Construction pour un ordinal successeur $\alpha+1$

Posons $\eta(\alpha)=(\theta,\delta')$ et $\eta(\theta)=(\beta,\gamma)$. Montrons d'abord que pour deux suites $\lambda_n, \lambda'_n \in B_n(\theta,\delta',\alpha)$ on a $\lim_{n\to I(\theta,\alpha)}(|\lambda_n|-|\lambda'_n|)=0$.

Si $E\subset K_\alpha$ est ouvert-fermé, il dépend des coordonnées d'un ensemble fini $P\subseteq\alpha$. Si $n\in I(\theta,\alpha)$ est assez grand, on a

$$t,t'\in V_n(\theta,\alpha);\quad \varphi_\theta(t)=\varphi_\theta(t')\Rightarrow t(\delta)=t'(\delta)\qquad \text{pour } \delta\in P,$$

ce qui montre que pour n assez grand φ_θ est injective sur $\varphi_{\theta\cup P}(V_n(\theta,\alpha))$. Mais puisque $\|\lambda_n\|=1$ et $\|\varphi_\theta(\lambda_n)\|=1$, on a

$$\varphi_\theta(|\lambda_n|)=|\nu_n(\theta,\alpha)|=\varphi_\theta(|\lambda'_n|),$$

ce qui implique que λ_n et λ'_n sont portées par $V_n(\theta,\alpha)$. On a donc $\varphi_{\theta\cup P}(|\lambda_n|)=\varphi_{\theta\cup P}(|\lambda'_n|)$ pour $n\in I(\theta,\alpha)$ assez grand, donc $|\lambda_n|(E)=|\lambda'_n|(E)$ pour $n\in I(\theta,\alpha)$ assez grand, ce qui prouve l'assertion.

Il en résulte que si on prend $\lambda_n\in B_n(\theta,\delta',\alpha)$ et $I_0\subset I(\theta,\alpha)$ infini tel que $\nu=\lim_{n\to I_0}|\lambda_n|$ existe, alors $\nu=\lim_{n\to I_0}|\lambda'_n|$ pour toute suite $\lambda'_n\in B_n(\theta,\delta',\alpha)$. (Si $\theta=\alpha$, on prend $I_0\subseteq\mathbf{N}$.)

Enumérons $[\omega,\alpha]$ par $(\theta_i)_{i\in I}$ où $I\subseteq\mathbf{N}$ et où $\theta_0=\alpha$. Soit $q\to\delta_q$ une surjection de $\mathbf{N}$ sur α telle que pour $\delta<\alpha$, les deux ensembles

$$\{q\,;q\text{ pair}, \delta_q=\delta\},\quad \{q\,;q\text{ impair } \delta_q=\delta\}$$

soient infinis.

Pour $i\in I$, $\delta<\alpha$, définissons μ^i_δ comme suit. Pour $i=0$, μ^0_δ est n'importe quel point d'accumulation de $\langle\nu_n(\alpha,\delta)\rangle_{n\in\mathbf{N}}$. Pour $i\neq 0$, μ^i_δ est la limite commune des suites $(\lambda_n)_{n\in J(\theta_i,\delta,\alpha)}$ pour $\lambda_n\in B_n(\theta_i,\delta,\alpha)$, qui existe d'après (F).

Soit W_q un ouvert-fermé de $V_q(\theta,\theta)$ tel que $\nu_q(\theta,\delta')\,(W_q)>\frac{1}{3}$.

On va construire par induction des ouverts-fermés H_q de K_α, des entiers n_q, $m_{i,q}$ pour $i\in I$, $q\in\mathbf{N}$ vérifiant les conditions suivantes:

(a) $m_{i,q+1}>m_{i,q}$ $\forall i\in I$, $q\in\mathbf{N}$.

(b) $m_{i,q}\in J(\theta_i,\delta_q,\alpha)\cap N_{\varepsilon(q)}(\theta_i,\delta_q)$ où $\varepsilon(q)=0$ si q est pair et $\varepsilon(q)=1$ sinon.

(c) $\nu(V_{m_{i,q}}(\theta_i,\alpha))\leqq 2^{-i-q-7}$ $\forall i\in I$, $\forall q\in\mathbf{N}$.

(d) Si $P(q)$ est le plus petit sous-ensemble de α tel que $\delta_i\in P(q)$ pour $i\leqq q$ et que H_k ne dépende que des coordonnées dans $P(q)$ pour $k\leqq q$, alors

$$t,t'\in V_{m_{i,q}}(\theta_i,\alpha);\quad \varphi_{\theta_i}(t)=\varphi_{\theta_i}(t')\Rightarrow \varphi_{P(q)}(t)=\varphi_{P(q)}(t').$$

(e) $\|\varphi_{P(q)}(\lambda)-\varphi_{P(q)}(\mu^{i}_{\delta_q})\| \leqq 2^{-q}$ $\forall \lambda \in B_{m_{i,q}}(\theta_i, \delta_q, \alpha)$.

(f) $n_q \in I_0$, $n_{q+1} > n_q$ $\forall q \in \mathbf{N}$.

(g) Si $\lambda \in B_{n_q}(\theta, \delta', \alpha)$ alors $|\lambda|(V_{m_{i,j}}(\theta_i, \alpha)) \leqq 2^{-i-j-6}$ $\forall i, j < q$.

(h) $H_q = \varphi_\theta^{-1}(W_{n_q}) \setminus \bigcup_{i,j<q} V_{m_{i,j}}(\theta_i, \alpha)$.

Pour choisir n_q vérifiant (f), (g) lorsque les $m_{i,j}$ pour $i, j < q$ sont déjà construits, on utilise (c) et le choix de I_0. Pour choisir $m_{0,q}$ lorsque les n_k sont construits pour $k \leqq q$, il suffit de remarquer que (a) et (c) sont valides pour $m_{0,q}$ assez grand, que (d) est valide pour tout $m_{0,q}$ puisque $P(q) \subsetneq \alpha = \theta_0$, et que (e) est valide pour une infinité de $m_{0,q}$ puisque $B_n(\theta_0, \delta_q, \alpha) = \{\nu_n(\alpha, \delta_q)\}$. Pour choisir $m_{i,q}$, pour $i > 0$, lorsque n_k pour $k \leqq q$ sont déjà construits, il suffit de remarquer que (a) et (c) sont valides pour $m_{i,q}$ assez grands, que (b) est valide pour une infinité de $m_{i,q}$ de $J(\theta_i, \delta_q, \alpha)$, que (d) est valide pour $m_{i,q}$ assez grand dans $I(\theta_i, \alpha) \supset J(\theta_i, \delta_q, \alpha)$, et que (e) est valide pour tout $m_{i,q}$ assez grand dans $J(\theta_i, \delta_q, \alpha)$.

On pose:

$$Z_\alpha = \overline{\bigcup_{q \text{ pair}} H_q}, \qquad Y_\alpha = \overline{K_\alpha \setminus Z_\alpha},$$

$$I(\theta_i, \alpha+1) = \{m_{i,q}\,;\, q \in \mathbf{N}\} \qquad \text{pour } i \in I,$$

$$J(\theta_i, \delta, \alpha+1) = \{m_{i,q}\,;\, \delta_q = \delta\} \qquad \text{pour } i \in I, \quad \delta < \alpha.$$

Pour $\delta < \alpha$, on désigne par $N_0(\alpha, \delta)$, $N_1(\alpha, \delta)$ deux ensembles infinis disjoints de $J(\alpha, \delta, \alpha+1)$.

Comme au début de ce paragraphe, on montre grâce à (E) que si $\lambda_n, \lambda'_n \in B_n(\theta, \alpha, \alpha+1)$ pour $\theta \leqq \alpha$, on a $\lim_{n \to I(\theta, \alpha+1)}(|\lambda_n| - |\lambda'_n|) = 0$. Il existe donc un ensemble infini $J(\theta, \alpha, \alpha+1) \subsetneq I(\theta, \alpha+1)$ tel que $\lim_{n \to J(\theta, \alpha, \alpha+1)} \lambda_n$ existe pour $\lambda_n \in B_n(\theta, \alpha, \alpha+1)$. Soient $N_0(\theta, \alpha)$ et $N_1(\theta, \alpha)$ deux ensembles infinis disjoints de $J(\theta, \alpha, \alpha+1)$.

Montrons que les conditions (A) à (G) sont vérifiées. C'est évident pour (A) et (B). Pour (C) cela résulte de (b), du choix de δ_q, et du choix de $N_0(\alpha, \delta)$, $N_1(\alpha, \delta)$ pour $\theta = \alpha$.

De plus pour tout $i \in I$, $q \in \mathbf{N}$

$$m_{i,q} \in J(\theta_i, \delta_q, \alpha) \subset I(\theta_i, \alpha)$$

d'où $I(\theta_i, \alpha+1) \subset I(\theta_i, \alpha)$, ce qui montre que (D) est vérifiée.

Vérifions (E) au rang $\alpha+1$. Soit d'abord $\theta \leqq \alpha' < \alpha$, et $i \in I$ tel que $\theta = \theta_i$. Pour q assez grand, on a $\alpha' \in P(q)$. Alors, pour $t, t' \in V_{m_{i,q}}(\theta_i, \alpha+1)$ et $\varphi_{\theta_i}(t) = \varphi_{\theta_i}(t')$, on a

$$\varphi_\alpha(t), \varphi_\alpha(t') \in V_{m_{i,q}}(\theta_i, \alpha) \quad \text{et} \quad \varphi_{\theta_i}(\varphi_\alpha(t)) = \varphi_{\theta_i}(\varphi_\alpha(t')),$$

d'où d'après (d), on a $\varphi_{P(q)}(t) = \varphi_{P(q)}(t')$, d'où $t(\alpha') = t'(\alpha')$. D'autre part, aucun $V_{m_{i,q}}(\theta_i, \alpha)$ ne rencontre $Y_\alpha \cap Z_\alpha$. (Puisque d'après (h) il ne rencontre qu'un nombre fini de H_q.) Donc pour $n \in I(\theta_i, \alpha+1)$, on a $t(\alpha) = t'(\alpha)$ si $t, t' \in V_n(\theta_i, \alpha+1)$, ce qui termine la preuve de (E).

Vérifions (F) au rang $\alpha + 1$ pour $\delta < \alpha$. Soit $\lambda_n \in B_n(\theta_i, \delta, \alpha+1)$ pour $i \in I$. Posons, pour $m_{i,q} \in J(\theta_i, \delta, \alpha+1)$

$$\eta_q = \varphi_\alpha \lambda_{m_{i,q}} \in B_{m_{i,q}}(\theta_i, \delta_q, \alpha).$$

On a ainsi, d'après (e)

$$\| \varphi_{P(q)}(\eta_q) - \varphi_{P(q)}(\mu^i_{\delta_q}) \| \leqq 2^{-q}.$$

Soit $E \subseteq K_{\alpha+1}$ un ouvert-fermé. Il est de la forme

$$E = ((E_0 \cap Y_\alpha) \times \{0\}) \cup ((E_1 \cap Z_\alpha) \times \{1\})$$

où E_1, E_2 sont des ouverts fermés de K_α.

Puisque η_q est portée par $V_{m_{i,q}}(\theta_i, \alpha)$, qui ne rencontre pas $Y_\alpha \cap Z_\alpha$, on a

$$\lambda_{m_{i,q}}(E) = \eta_q(E_0 \cap Y_\alpha) + \eta_q(E_1 \cap Z_\alpha) = \eta_q(E_0) - \eta_q(E_0 \cap Z_\alpha) + \eta_q(E_1 \cap Z_\alpha).$$

Montrons que si on pose $J_0 = \{q \,;\, \delta_q = \delta\}$, on a

$$\lim_{q \to J_0} \eta_q(E_0 \cap Z_\alpha) = \sum_{r \text{ pair}} \mu^i_\delta(E_0 \cap H_r) \overset{\text{déf}}{=} \xi.$$

Pour $q \in J_0$, on a

$$\eta_q(E_0 \cap Z_\alpha) = \eta_q(E_0 \cap V_{m_{i,q}}(\theta_i, \alpha) \cap Z_\alpha) = \sum_{\substack{r \text{ pair} \\ r \leqq q}} \eta_q(E_0 \cap H_r)$$

d'où

$$|\eta_q(E_0 \cap Z_\alpha) - \xi| \leqq \sum_{\substack{r \text{ pair} \\ r \leqq q}} |\eta_q(E_0 \cap H_r)| - \mu^i_\delta(E_0 \cap H_r)| + \sum_{r > q} |\mu^i_\delta(E_0 \cap H_r)|.$$

Si q est assez grand pour que E_0 ne dépende que des coordonnées dans $P(q)$, on a

$$|\eta_q(E_0 \cap Z_\alpha) - \xi| \leqq \sum_{\substack{r \text{ pair} \\ r \leqq q}} \|\varphi_{P(q)}(\eta_q) - \varphi_{P(q)}(\mu^i_\delta)\| + \sum_{r>q} |\mu^i_\delta(E_0 \cap H_r)|$$

$$\leqq (q+1)2^{-q} + \sum_{r>q} |\mu^i_\delta|(E_0 \cap H_r)$$

qui tend vers zéro quand $q \to \infty$.

De même $\lim_{q \to J_0} \eta_q(E_1 \cap Z_\alpha)$ existe. Enfin $\lim_{q \to J_0} \eta_q(E_0)$ existe, d'où $\lim_{n \to J(\theta_i, \delta, \alpha+1)} \lambda_n(E)$ existe; puisque E est arbitraire, $\lim_{n \to J(\theta_i, \delta, \alpha+1)} \lambda_n$ existe.

Enfin, (F) est vérifiée au rang $\alpha + 1$ pour $\delta = \alpha$ par construction. Vérifions (G) au rang $\alpha + 1$. Si $\lambda \in B_{n_q}(\theta, \delta', \alpha + 1)$ alors

$$\lambda(H_q) \geqq \nu_{n_q}(\theta, \delta')(W_{n_q}) - \sum_{i,j \in \mathbf{N}} 2^{-i-j-6} \geqq \frac{1}{6}.$$

Puisque $H_q \subset V_{n_q}(\theta, \alpha)$, on a $Z_\alpha \cap V_{n_q}(\theta, \alpha) = H_q$ si q est pair et $= \varnothing$ sinon. D'où

$$\lambda(Z_\alpha) = \lambda(Z_\alpha \cap V_{n_q}(\theta, \alpha)) \geqq \frac{1}{6}$$

si q est pair, et $= 0$ sinon. De plus, si $\lambda \in B_{n_q}(\theta, \delta', \alpha + 1)$, on a

$$\lambda(Z_\alpha \times \{1\}) = (\varphi_\alpha \lambda)(Z_\alpha)$$

puisque $\varphi_\alpha \lambda$ est portée par $V_{n_q}(\theta, \alpha)$ qui ne rencontre pas $Y_\alpha \cap Z_\alpha$, et $\varphi_\alpha \lambda \in B_{n_q}(\theta, \delta, \alpha)$.

La construction est terminée.

V. Conclusion

THÉORÈME 4. *Le compact $K = K_\Omega$ est tel que $\mathscr{C}(K)$ possède la propriété de Grothendieck, mais que $M_1(K)$ ne contienne pas $\beta\mathbf{N}$. En particulier l^∞ n'est pas un quotient de $\mathscr{C}(K)$.*

PREUVE. Soit (λ_n) une suite de mesures sur K portées par des ouverts-fermés disjoints W_n avec $\|\lambda_n\| = 1$ et $\|\lambda_n^+\| \geqq \frac{1}{2}$. Si $\beta < \Omega$ est assez grand, chaque W_n ne dépends que de coordonnées dans β, et $\|\varphi_\beta(\lambda_n)\| = 1$ pour tout n. Soit γ tel que $W_n = \varphi_\beta^{-1}(U_n(\beta, \gamma))$; posons $\theta = \eta^{-1}(\beta, \gamma)$. Alors $\|\varphi_\theta(\lambda_n)\| = 1$, et $\varphi_\theta(\lambda_n)$ est portée par $V_n(\theta, \theta)$; il existe donc $\delta < \Omega$ tel que $\varphi_\theta(\lambda_n) = \nu_n(\theta, \delta)$ pour tout $n \in \mathbf{N}$. Ainsi $\varphi_\alpha(\lambda_n) \in B_n(\theta, \delta, \alpha)$ pour $\alpha \geqq \theta$.

Si $\alpha' = \eta^{-1}(\theta, \delta)$ les deux ensembles

$$\left\{n : \varphi_{\alpha'+1}(\lambda_n)(Z_{\alpha'} \times \{1\}) \geqq \frac{1}{6}\right\} \quad \text{et} \quad \{n ; \varphi_{\alpha'+1}(\lambda_n)(Z_{\alpha'} \times \{1\}) = 0\}$$

sont infinis. Il existe donc un ouvert-fermé $Z = \varphi_{\alpha'+1}^{-1}(Z_{\alpha'} \times \{1\})$ de K tel que les deux ensembles

$$\left\{n ; \lambda_n(Z) \geqq \frac{1}{6}\right\} \quad \text{et} \quad \{n ; \lambda_n(Z) = 0\}$$

soient infinis.

Si $\alpha > \max(\theta, \delta)$, on a $\lim_{n \to J(\theta,\delta,\alpha)} \varphi_\alpha(\lambda_n)$ existe.

Si $\mathcal{F}$ est le filtre engendré par $\{J(\theta, \delta, \alpha); \alpha > \max(\theta, \delta)\}$. Alors $\lim_{n \to \mathcal{F}} \lambda_n$ existe, et $\mathcal{F}$ n'est pas un ultrafiltre puisque tout ensemble de $\mathcal{F}$ rencontre $N_0(\theta, \delta)$ et $N_1(\theta, \delta)$.

Prouvons que $\mathscr{C}(K)$ possède la propriété de Grothendieck. Supposons, qu'il existe une suite $v_n \in M_1(K)$ vaguement convergente et non faiblement convergente. D'après le théorème d'Eberlein, on peut supposer qu'aucune sous-suite de (v_n) n'est faiblement convergente. D'après le lemme 2, on peut supposer $v_n = g_n + h_n$, où (g_n) converge faiblement, et où $\|h_n\| = \eta > 0$, les h_n étant portés par des ensembles mesurables disjoints. D'après le lemme 1, on peut écrire $h_n = \lambda_n + \lambda'_n$, où $\|\lambda'_n\| = \eta/10$, et où $\|\lambda_n\| = 9\eta/10$, les λ'_n étant portés par des ouverts-fermés disjoints et $\|\lambda_n^+\| \geqq \frac{1}{2}\|\lambda_n\|$ (par passage à une sous-suite). De l'existence d'un ouvert-fermé Z de K tel que les ensembles $\{n ; |\lambda_n(Z)| \geqq \frac{1}{6}\}$, $\{n ; \lambda_n(Z) = 0\}$ soient infinis découle sans peine que h_n ne peut converger vaguement.

Si $M_1(K)$ contient $\beta\mathbf{N}$, soient h_n et τ donnés par la proposition 3. Alors on peut écrire $h_n = \lambda_n + \lambda'_n$, où $\|\lambda'_n\| \leqq \tau/2$, $\|\lambda_n\| = 1 - \tau/2$ et les λ_n sont portés par des ouverts-fermés disjoints, et où $\|\lambda_n^+\| \geqq \|\lambda_n\|/2$ (par passage à une sous-suite).

Si $\mathcal{F}$ est un filtre qui n'est pas un ultrafiltre et tel que $\lim_{n \to \mathcal{F}} \lambda_n$ existe, alors on voit sans peine que la condition (1) ne peut être satisfaite.

Remarque. Ulterieurement a ce travail, l'auteur a demontré qu'un espace de Banach E admet l^∞ comme quotient si et seulement si la boule unité de E' munie de la topologie $\sigma(E', E)$ contient une copie de $\beta\mathbf{N}$.

Bibliographie

1. R. Haydon, *On dual L^1-spaces and injective bidual Banach spaces*, Israel J. Math. **31** (1978), 142–152.

2. R. Haydon, *A non-reflexive Grothendieck space which does not contain l^∞*, à paraître dans Israel J. Math.

3. M. I. Kadec and A. Pelczynski, *Bases, lacunary sequences and complemented subspaces in the space L_p*, Studia Math. **21** (1962), 161–176.

4. A. Pelczynski, *Banach spaces on which every unconditionally converging operation is weakly compact*, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. **10** (1962), 641.

5. H. P. Rosenthal, *On relatively disjoint families of measures, with some applications to Banach Space theory*, Studia Math. **37** (1970), 13–36.

6. G. L. Seever, *Measures on F-spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **133** (1968), 267–280.

EQUIPE D'ANALYSE — TOUR 46
UNIVERSITÉ PARIS IV
4, PLACE JUSSIEU
75230 PARIS CEDEX 05, FRANCE